# Théorèmes Limites Avec Poids Pour Les Martingales Vectorielles à Temps Continu

Faouzi Chaabane* & Ahmed Kebaier†

8 février 2008

**Résumé** : On développe une approche générale du Théorème limite centrale presque sure pour les martingales vectorielles quasi-continues à gauches convenablement normalisées et on dégage une extension quadratique de ce théorème tout en précisant les vitesses de convergence qui lui sont associés.L'application de ce résultat à un P.A.I.S. illustre l'usage qu'on peut en faire en statistique.

## 1 Introduction.

### 1.1 Motivation.

Établi suite aux travaux pionniers de **?** et de **?**, le théorème de la limite centrale presque-sûre (TLCPS) a révélé un nouveau phénomène dans la théorie classique des théorèmes limites. En effet, pour une marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et dont les accroissements sont des v.a. i.i.d., centrés de variance $C$, le (TLCPS) assure que les mesures empiriques logarithmiques associées aux v.a. $(n^{-1/2}S_n)$ c'est à dire :

$$\mu_N = (\log N)^{-1}\sum_{n=1}^{N} n^{-1}\delta_{n^{-1/2}S_n}$$

vérifient

$$\mu_N \Rightarrow \mu_\infty \ \ p.s.,$$

où $\mu_\infty$ est la loi Gaussienne de moyenne 0, de variance $C$ et $\delta_x$ la mesure de Dirac en $x$. Dans ce cadre, et sous des conditions d'uniformes intégrabilité par exemple, on dispose de la propriété suivante appelée loi forte quadratique

*Équipe d'Analyse Stochastique et Modélisation Statistique (DGRST, E07/C15) Faculté Des Sciences de Bizerte. 7021 Jarzouna, Tunisie.

†Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR 8050, Université de Marne-La-Vallée, 5 boulevard Descartes, Champs-Sur-Marne, F-77454 Marne-La-Vallée Cedex 2, France.

(LFQ) :

$$\lim_{N\to\infty} (\log N)^{-1} \sum_{n=1}^{N} n^{-2} S_n S_n^* = C \quad p.s.,$$

où $S_n^*$ désigne le transposé du vecteur $S_n$.

Le théorème de la limite centrale presque-sûre ainsi que les divers théorèmes "logarithmiques" qui lui sont associés ont mené à une littérature étendue durant la décennie passée. En effet, ils ont été généralisés aux martingales discrètes unidimensionnelles par **?** et **?** puis aux martingales discrètes $d$-dimensionnelles par **?** et ensuite aux martingales continues par **?**.

Les résultats de **?** et de **?** ont été obtenus grâce à une approximation forte de la martingale $M$ par une trajectoire Brownienne réalisée en exploitant la méthode de troncature. Alors que les résultats de **?** ont été obtenus en reprenant la technique de la fonction caractéristique utilisée par **?** pour démontrer le théorème de la limite centrale généralisé pour les martingales.

Le but de cet article consiste d'une part à généraliser le théorème de la limite centrale presque-sûre aux martingales quasi-continues à gauches et d'autre part à établir des théorèmes limites précisant les vitesses de convergences (en loi et au sens presque-sûr) de la loi forte quadratique (LFQ) associée à ce théorème de la limite centrale presque-sûre pour les martingales quasi-continues à gauches. L'exemple suivant met en évidence l'application des différents théorèmes obtenus et leur usage en statistique

## 1.2 Estimation de la variance d'un P.A.I.S.

Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un processus à accroissements indépendants et stationnaires (P.A.I.S.) dont la mesure de Lévy des sauts $\nu$ vérifie :

$$\nu(dt, dx) = dt\, F(dx), \quad \text{avec} \quad \int |x|^{2p} F(dx) < \infty \quad \text{pour un} \quad p > 1, \qquad (1.1)$$

où $F$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$. On note :

$$m = \mathbb{E}\, S_1, \qquad \sigma^2 = \mathbb{E}\, S_1^2 - m^2.$$

La loi forte quadratique (voir Théorème 3.2) nous permet de définir un estimateur fortement consistant de $\sigma^2$. En effet on a le résultat suivant

$$\hat{\sigma}_t^2 := (\log(1+t))^{-1} \int_0^t \frac{(S_r - mr)^2}{(1+r)^2}\, dr \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 \quad p.s..$$

Si de plus, pour un $\rho > 1/2$ on a

$$(1+t)^{-1} \sum_{r\leq t} (\Delta S_r)^2 - \int_{\mathbb{R}} |x|^2 F(dx) \leq c^{te} \left[\log(1+t)\right]^{-\rho} \;\; \text{p.s.},$$

alors le théorème de la limite centrale associé à la loi forte quadratique (voir Théorème 3.3) nous permet d'établir le résultat suivant

$$\sqrt{\log(1+t)}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \Rightarrow \mathfrak{N}(0, 4\sigma^4).$$

Ces résultats seront étendus à des P.A.I.S. pondérés. (voir la partie 4 du papier). Les principaux résultats sont énoncés au paragraphe suivant et démontrés au paragraphe 4. Au paragraphe 3, on regroupe les outils techniques utilisés dans les preuves. Ces outils sont établis au paragraphe 5.

## 2 Préliminaires

On note $\|.\|$ la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Pour une matrice réelle carrée $A$ : $A^*$, $\mathrm{tr}(A)$, et $\det(A)$ désignent respectivement la matrice transposée, la trace et le déterminant de $A$. La norme de $A$ est définie par : $\|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^*A)$. On considère une martingale quasi-continue à gauche $M = (M_t)_{t\geq 0}$ $d$-dimensionnelles, localement de carré intégrable, définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. On considère de même un processus déterministe $V = (V_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans l'ensemble des matrices inversibles. Dans la suite on rappelle un théorème fondamental de **?** qui nous sera utile dans les preuves de nos principaux résultats.

Pour $u \in \mathbb{R}^d$ on définit

$$\Phi_t(u) := \exp\Big(-\frac{1}{2}u^*\langle M^c\rangle_t u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big(\exp(i\langle u, x\rangle - 1 - i\langle u, x\rangle\big)\nu^M(ds, dx)\Big)$$

où $M^c$, $\nu^M$ sont respectivement la partie martingale continue et la mesure de Lévy des sauts de $M$.

**Théorème 2.1 (Théorème Limte Centrale Généralisé pour les Martingales).** *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale, d-dimensionnelle, nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t)_{t\geq 0}$ une famille déterministe de matrices inversibles. Si le couple $(M, V)$ vérifie l'hypothèse :*

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} \Phi_t((V_t^*)^{-1}u) \to \Phi_\infty(\eta, u) \;\; p.s. \\ \\ \Phi_\infty(\eta, u) \quad non\ nulle\ \ p.s. \end{cases}$$

*(où $\eta$ désigne une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, éventuellement dégénérée et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{X}$) alors on a*

$$Z_t := V_t^{-1}M_t \Rightarrow Z_\infty := \Sigma(\eta)$$

*de manière stable où $(\Sigma(x), x \in \mathfrak{X})$ est un processus de loi $\mathcal{Q}$ et indépendant de la v.a $\eta$.*

Notons que pour $(x,u) \in \mathfrak{X} \times \mathbb{R}^d$ :

$$\Phi_\infty(x,u) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\big(i\langle u,\xi\rangle\big)\pi(x,d\xi)$$

désigne la transformée de Fourier des lois marginales unidimensionnelles $\big(\pi(x,.); x \in \mathfrak{X}\big)$ d'une loi de probabilité $\mathcal{Q}$ sur l'espace $\mathfrak{C}(\mathfrak{X},\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues de $\mathfrak{X}$ dans $\mathbb{R}^d$.

# 3 Énoncé des principaux résultats

Dans la suite, on donne quelques propriétés aux quelles doit obéir la normalisation matricielle $(V_t)$. On dit que la famille $(V_t)$ vérifie la condition $(\mathcal{C})$ si les trois propriétés $\{(\mathcal{C}1),\ (\mathcal{C}2),\ (\mathcal{C}3)\}$ ont lieu :

• $(\mathcal{C}1)$ $t \mapsto V_t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ ;

• $(\mathcal{C}2)$ il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq s \geq s_0$ on a $V_sV_s^* \leq V_tV_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques positives) ;

• $(\mathcal{C}3)$ il existe une fonction $a = (a_t)$ continue, décroissante vers 0 à l'infini, telle que :

$$A_t := \int_0^t a_s ds \uparrow \infty \ \text{ pour } \ t \uparrow \infty$$

et une matrice $U$ vérifiant :

$$a_t^{-1}V_t^{-1}\frac{dV_t}{dt} - U = \Delta_t, \quad \text{avec } \lim_{t\to\infty} \Delta_t = 0$$

et telle que la matrice symétrique $S := U + U^*$ soit définie positive.

## 3.1 Théorème de la limite centrale presque-sûre généralisé.

**Théorème 3.1.** *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale, d-dimensionnelle, nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t)_{t\geq 0}$ une famille déterministe de matrices inversibles satisfaisant aux conditions $(C)$. Si le couple $(M,V)$ vérifie l' hypothèse $(\mathcal{H})$ et l'hypothèse*

$$(\mathcal{H}1): \ \ V_t^{-1}\langle M\rangle_t(V_t^*)^{-1} \to C \quad p.s.,$$

*(où $C$ est une matrice aléatoire ou non) alors les mesures $(\mu_R)$ aléatoires définies par :*

$$\mu_R = \big(\log\ \big(\det V_R^2\big)\big)^{-1}\int_0^R \delta_{Z_r} d\log\big(\det V_r^2\big), \quad où \quad Z_r = V_r^{-1}M_r$$

*vérifient la version généralisée suivante du TLCPS :*

$$\textit{(TLCPSG)}: \qquad \mu_R \Longrightarrow \mu_\infty \ \ \textit{p.s.}.$$

**Remarques 1.** *Notons que sous l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$ et l'hypothèse*

$$(\mathcal{H}') : \ \forall\, \delta > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^t \|V_t^{-1}x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_t^{-1}x\|>\delta\}}\nu^M(ds,dx) \to 0.$$

*l'hypothèse $(\mathcal{H})$ a lieu avec*

$$\eta = C^{1/2} \quad \textit{et} \quad \Phi_\infty(x,u) = \exp(-\frac{1}{2}u^*xx^*u).$$

*L'hypothèse $(\mathcal{H}')$ est plus connue sous le nom de condition de Lindberg.*

## 3.2 Lois fortes quadratiques associées au TLCPS

Le théorème suivant donne une loi forte des grands nombres avec une normalisation matricielle :

**Théorème 3.2.** *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale, d-dimensionnelle, quasi-continue à gauche et nulle en 0. On suppose que pour une famille de matrices inversibles $V = (V_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la condition $(\mathcal{C})$. Si le couple $(M,V)$ satisfait aux hypothèses : $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H}1)$,*

$$(\mathcal{H}2) : \ V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1} \to C \quad \textit{p.s.}.$$

*et*

$$(\mathcal{H}3) : \ C = \int xx^* d\mu_\infty(x).$$

*(où $\mu_\infty = \mu_\infty(\omega,.)$ désigne la probabilité de transition (éventuellement non aléatoire) loi de la v.a $\Sigma\big(\eta(\omega)\big)$ (voir Théorème 2.1)). Alors on a les résultats suivants :*

$$\textit{(LFQ) :} \quad \big(\log\left(\det V_R^2\right)\big)^{-1}\int_0^R V_s^{-1}M_{s\_}M_{s\_}^*V_s^{*-1}d\big(\log(\det V_s^2\big) \to C \quad \textit{p.s.},$$

$$\textit{(LL) :} \quad \|V_r^{-1}M_r\| = o\big(\sqrt{\log(\det V_r^2)}\big) \quad \textit{p.s.}.$$

**Remarque 1.** *Notons que l'hypothèse $(\mathcal{H}3)$ est automatiquement vérifiée sous les hypothèses $(\mathcal{H}')$ et $(\mathcal{H}1)$.*

## 3.3 Vitesses de convergence de la LFQ (cas d'une normalisation matricielle)

Dans la suite on donne un TLC pour la LFQ établie ci-dessus.

**Théorème 3.3.** *Soit* $M=(M_t,\, t \geq 0)$ *une martingale locale, d-dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en* $0$*. On suppose que pour une famille de matrices inversibles* $V = (V_t)_{t\geq 0}$ *vérifiant la condition* $(\mathcal{C})$ *et que le couple* $(M,V)$ *satisfait aux hypothèses :* $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ *et* $(\mathcal{H}3)$*. Supposons de plus, que la condition* $(\mathcal{C}3)$ *est vérifiée avec* $\Delta_t = O(A_t^{-3/2})$, $(t \to \infty)$*. Alors si* $R$ *désigne la matrice symétrique, positive solution de l'équation de Lyapounov :*

$$I = RU + U^* R,$$

*on obtient :*

$$\big(\log(\det V_t^2)\big)^{-1/2} \int_0^t \mathrm{tr}\Big[V_s^{-1}\big(M_{s_-}M_{s_-}^* - [M]_s\big)(V_s^*)^{-1}\Big]\, d\big(\log(\det V_s^2)\big) \Rightarrow 2\sqrt{\mathrm{tr}(S)\,\mathrm{tr}\big(\tilde{C}RCR\big)}G, \quad (3.2)$$

*où* $\tilde{C} := UC + CU^*$, $S = U + U^*$ *(*$U$ *étant la matrice définie dans la condition* $(\mathcal{C})$*) et* $G$ *une gaussienne centrée réduite. Si de plus pour un* $\rho > 1/2$ *on a que :*

$$\log\big(\det(V_t^2)\big)^{\rho}\Big|\mathrm{tr}\big\{V_t^{-1}\big([M]_t\big)(V_t^*)^{-1} - C\big\}\Big| = O(1) \ \ p.s., \quad (t \to \infty)$$

*alors*

$$\big(\log(\det V_t^2)\big)^{-1/2} \int_0^t \mathrm{tr}\Big[V_s^{-1}\big(M_{s_-}M_{s_-}^*\big)(V_s^*)^{-1} - C\Big]\, d\big(\log(\det V_s^2)\big) \Rightarrow 2\sqrt{\mathrm{tr}(S)\,\mathrm{tr}\big(\tilde{C}RCR\big)}G. \quad (3.3)$$

Dans ce cas, on donne une loi du logarithme itéré logarithmique associée à la (LFQ) qu'on notera : (LILL)

**Théorème 3.4.** *Soit* $M=(M_t,\, t \geq 0)$ *une martingale locale, d-dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en* $0$*. On suppose que pour une famille de matrices* $V = (V_t)_{t\geq 0}$ *vérifiant la condition* $(\mathcal{C})$*, le couple* $(M,V)$ *satisfait aux hypothèses :* $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ *et* $(\mathcal{H}3)$*. Supposons de plus que :*

$$\mathbb{E}\big[\sup_t M_t(\Delta M_t)^*\big] < \infty.$$

*On considère* $R$ *la matrice symétrique, positive solution de l'équation de Lyapounov :*

$$I = RU + U^* R.$$

*Si pour un $\rho > 1/2$ on a que :*

$$\log\big(\det(V_t^2)\big)^{\rho}\left|\mathrm{tr}\big\{V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1} - C\big\}\right| = O(1) \;\; p.s., \quad (t \to \infty)$$

*alors*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{h\big(\log(\det V_t^2)\big)} \int_0^t \mathrm{tr}\Big\{V_s^{-1}\big(M_{s_-}M_{s_-}^*\big)(V_s^*)^{-1} - C\Big\}\, d\big(\log(\det V_s^2)\big) \\ \leq \sqrt{\mathrm{tr}(S)\,\mathrm{tr}\big(\tilde{C}RCR\big)} \quad p.s.,$$

*où $\tilde{C} := UC + CU^*$, $S = U + U^*$ ($U$ étant la matrice définie dans la condition ($\mathcal{C}$)) et $h(u) = \sqrt{2u\log\log u}$ pour $u \geq e$.*

## 3.4 Vitesses de convergence de la LFQ (cas d'une normalisation scalaire)

On dira que $V_t$ est une normalisation scalaire vérifiant la condition ($\mathcal{C}$) si elle est de la forme

$$V_t = v_t I_d$$

oú $v_t$ est une fonction scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant au deux conditions suivantes
• il existe un $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq s \geq s_0$ on a $v_s^2 \leq v_t^2$
• il existe une fonction $a = (a_t)$ continue, décroissante vers 0 à l'infini, telle que :

$$A_t = \int_0^t a_s\, ds \uparrow \infty \;\text{ pour }\; t \uparrow \infty$$

et un scalaire positif $\eta$ tel que

$$a_t^{-1} v_t^{-1} v_t' - \eta = \delta_t, \;\; \text{avec} \;\; \lim_{t\to\infty} \delta_t = 0. \tag{3.4}$$

Ainsi le théorème limite centrale asocié à la (LFQ) est donné par le résultat suivant

**Théorème 3.5.** *Soit $M$=($M_t$, $t \geq 0$) une martingale locale, d-dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en 0. Soit $V = (V_t)_{t\geq 0}$ une normalisation scalaire vérifiant la condition ($\mathcal{C}$) et tel que le couple $(M, V)$ satisfait aux hypothèses : ($\mathcal{H}$), ($\mathcal{H}1$), ($\mathcal{H}2$) et ($\mathcal{H}3$). Supposons de plus que la relation (3.4) est vérifiée avec $\delta_t = O(A_t^{-3/2})$, $(t \to \infty)$. Alors il vient que*

$$\big(\log(v_t^2)\big)^{-1/2} \int_0^t v_s^{-2}\big[M_{s_-}M_{s_-}^* - [M]_s\big] d\big(\log(v_s^2)\big) \;\; \Rightarrow (2\eta C)\, G, \tag{3.5}$$

*où $G$ est une gaussienne centrée réduite. Si de plus on suppose que pour un $\rho > 1/2$ on a*

$$\log\bigl(v_t^{2\rho}\bigr)\Bigl|v_t^{-2}[M]_t - C\Bigr| = O(1) \;\; p.s., \quad (t \to \infty)$$

*alors*

$$\bigl(\log(v_t^2)\bigr)^{-1/2}\int_0^t \bigl[v_s^{-2}M_{s_-}M_{s_-}^* - C\bigr]d\bigl(\log(v_s^2)\bigr) \Rightarrow (2\eta C)\, G. \tag{3.6}$$

Dans ce cadre la loi du logarithme itérée est donnée par le théorème suivant

**Théorème 3.6.** *Soit $M$=$(M_t,\, t \geq 0)$ une martingale locale, d-dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en 0. On suppose que pour une normalisaion scalaire $V = (V_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la condition $(\mathcal{C})$, le couple $(M, V)$ satisfait aux hypothèses : $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{H}1)$, $(\mathcal{H}2)$ et $(\mathcal{H}3)$. Supposons de plus que :*

$$\mathbb{E}\bigl[\sup_t M_t(\Delta M_t)^*\bigr] < \infty.$$

*Si pour un $\rho > 1/2$ on a que :*

$$\log\bigl(v_t^{2\rho}\bigr)\Bigl|v_t^{-2}[M]_t - C\}\Bigr| = O(1) \;\; p.s., \quad (t \to \infty)$$

*alors*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{h\bigl(\log(v_t^2)\bigr)}\int_0^t \bigl[v_s^{-2}M_{s_-}M_{s_-}^* - C\bigr]\, d\bigl(\log(v_s^2)\bigr) \leq 2\eta C \quad p.s.,$$

*où $h(u) = \sqrt{2u \log\log u}$ pour $u \geq e$.*

# 4 Démonstration des principaux résultats

Au début de ce paragraphe, on donne une propriété simple nous permettant de simplifer les preuves des principaux résultats. En effet, on rappelle que la differentielle du determinant d'une matrice inversible $X$ est donnée par

$$d\det(X) = \det(X)\,\mathrm{tr}(X^{-1}dX) \tag{4.7}$$

On en déduit alors que

$$\int_0^t 2\,\mathrm{tr}\bigl[V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\bigr]ds = \log(\det V_t)^2, \tag{4.8}$$

Compte tenu des conditions $(\mathcal{C})$ on voit que

$$\frac{\log\bigl(\det(V_t^2)\bigr)}{A_t\,\mathrm{tr}(S)} \to 1 \quad \text{p.s.} \tag{4.9}$$

avec $S = U + U^*$ la matrice introduite dans $(\mathcal{C}_3)$. Ainsi, cette propriété permettera de remplacer certaines moyennes logarithmiques par des moyennes pondérées par la fonction $a$.

## 4.1 Preuve du Théorème 3.1

Pour démontrer le Théorème 3.1 on va étudier la fonction caractéristique associée aux mesures $(\mu_R)$ donnée par

$$\psi_R(u) = \left(\log\ \left(\det V_R^2\right)\right)^{-1} \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r\rangle\} d \log\left(\det V_r^2\right)$$

En vue de simplifier la preuve on démontre tout d'abord le lemme suivant

**Lemme 4.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 3.1*

$$\lambda_R := \psi_R(u) - A_R^{-1} \int_0^R \exp\left\{i\left\langle u, Z_r\right\rangle\right\} dA_r \to 0 \;\; p.s. \;\; (R \to 0).$$

*Preuve.* En décomposant l'expression de $\lambda_R$ comme suit

$$\lambda_R = \lambda_R^1 + \lambda_R^2,$$

avec

$$\lambda_R^1 := \left(\log\ \left(\det V_R^2\right)\right)^{-1} \int_0^R \exp\{i\langle u, Z_r\rangle\} d\bigl(\log\left(\det V_r^2\right) - \mathrm{tr}(S) A_r\bigr)$$

et

$$\lambda_R^2 := \left(\left(\mathrm{tr}(S) \log\ \left(\det V_R^2\right)\right)^{-1} - A_R^{-1}\right) \int_0^R \exp\left\{i\left\langle u, Z_r\right\rangle\right\} dA_r,$$

en remarquant que

$$|\lambda_R^1| \leq \left|\log\ (\det V_R^2)\right|^{-1} \left|\log\left(\det V_R^2\right) - \mathrm{tr}(S) A_R\right|$$

on déduit par la relation (4.9) que $\lambda_R^1 \to 0$, $(R \to 0)$. De la même façon on voit que

$$|\lambda_R^2| \leq \left|\frac{A_R\, \mathrm{tr}(S)}{\log\left(\det V_R^2\right)} - 1\right| \to 0.$$

Ce qui termine la preuve du lemme. □

Compte tenu du lemme précédent on conclut que pour démontrer la propriété (TLCPS) il nous suffit de prouver que

$$A_R^{-1} \int_0^R \exp\left\{i\left\langle u, Z_r\right\rangle\right\} dA_r \to \Phi_\infty(\eta, u) \tag{4.10}$$

avec $\Phi_\infty(\eta, u)$ est la fonction caractéristique associée à la mesure limite $\mu_\infty$. Ainsi, en vue de démonter cette dernière relation, on va expliciter l'expression

de la variable aléatoire complexe $\exp\{i\langle u, Z_r\rangle\}$. Pour ce fait, On rappllera quelques résultats utiles dans la suite. On note $\Phi_t(u) := \exp\{B_t(u)\}$ avec

$$B_t(u) := -\frac{1}{2}\, u^* \langle M^c\rangle_t \; u \\ \qquad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Big( \exp\{i\langle u, x\rangle\} - 1 - i\langle u, x\rangle \Big) \nu^M(ds, dx).$$

Soit $(L_t(u))_{t\geq 0}$ le processus défini par

$$L_t(u) := [\Phi_t(u)]^{-1} \exp i\langle u, M_t\rangle,$$

alors on a le résultat suivant

**Lemme 4.2.** *Le processus $(L_t(u))_{t\geq 0}$ est une martingale locale complexe. De plus on a*

$$|L_t(u)| \leq \exp\left\{\frac{1}{2} u^* \;\langle M\rangle_t \; u\right\}. \tag{4.11}$$

*Preuve.* Comme $(B_t(u))_{t\geq 0}$ est un processus continu on en déduit que $(L_t(u))_{t\geq 0}$ est une martingale locale complexe (cf. **?**). D'autre part on voit que son module vaut

$$|L_t(u)| = \exp\left\{\frac{1}{2}\; u^* \;\; \langle M^c\rangle_t \;\; u\right\} \\ \times \exp\left\{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos\langle u, x\rangle)\, \nu^M(ds, dx)\right\}. \tag{4.12}$$

Ainsi la majoration (4.11) découle directement du fait que

$$1 - \cos x \leq x^2/2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Par conséquent, démontrer la relation (4.10) revient à prouver que

$$A_R^{-1} \int_0^R L_r\big((V_r^*)^{-1} u\big) \Phi_r\big((V_r^*)^{-1} u\big) dA_r \to \Phi_\infty(\eta, u). \tag{4.13}$$

Ainsi, afin d'exploiter le lemme précédent on introduit les temps d'arrêts suivants. Pour $u$ fixé dans $\mathbb{R}^d$, soit $b > 0$ un point de continuité de la v.a. $\mathrm{tr}(C)$ et $c > 0$ un point de continuité de la v.a. $|\Phi_\infty(\eta, u)|^{-1}$. Considérant les événements

$$E_r^b = \{\mathrm{tr}(C_r) > b\} \quad \text{et} \quad E_r^{u,c} = \left\{|\Phi_r(u)|^{-1} > c\right\},$$

où

$$C_r := V_r^{-1} \langle M\rangle_r \; (V_r^*)^{-1},$$

on définit le temps d'arrêt :

$$T_r := T_r^{b,c}(u) = T_r^b \wedge T_r^c(u),$$

avec

$$T_r^b := \begin{cases} \inf\left\{t \le r \ / \ \ \operatorname{tr}\left(V_r^{-1}\langle M\rangle_t \ (V_r^*)^{-1}\right) > b\right\} & \text{si} \quad E_r^b \text{ est réalisé,} \\ \\ r \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$T_r^c(u) := \begin{cases} \inf\left\{t \le r \ / \ |\Phi_t\left((V_r^*)^{-1}u\right)|^{-1} > c\right\} & \text{si} \quad E_r^{u,c} \text{ est réalisé,} \\ \\ r \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que d'après l'inégalité (4.11), $\Big(L_{t\wedge T_r}\left((V_r^*)^{-1}u\right)\Big)_{t\ge 0}$ est une martingale locale complexe dont le module est majoré par $\exp(b\left\|u\right\|^2/2)$. C'est donc une martingale d'espérance 1. D'où la propriété :

$$\mathbb{E}\, L_{r\wedge T_r}\left((V_r^*)^{-1}u\right) = 1.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} A_R^{-1}\int_0^R L_r\left((V_r^*)^{-1}u\right)\Phi_r\left((V_r^*)^{-1}u\right)dA_r - \Phi_\infty(\eta,u) = \\ A_R^{-1}\int_0^R \Big[L_{r\wedge T_r}\left((V_r^*)^{-1}u\right) - 1\Big]\Phi_\infty(\eta,u)dA_r + \Delta_R\left(b,c,u\right) \\ + \delta'_R(b,c,u) + \delta''_R(b,c,u) \end{aligned} \tag{4.14}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_R\left(b,c,u\right) := A_R^{-1}\int_0^R \exp\left\{i\left\langle u, V_r^{-1}M_r\right\rangle\right\}dA_r \\ - A_R^{-1}\int_0^R \exp\left\{i\left\langle u, V_r^{-1}M_{r\wedge T_r}\right\rangle\right\}dA_r, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\delta'_R(b,c,u) := A_R^{-1}\int_0^R L_r\left((V_r^*)^{-1}u\right)\left[\Phi_r\left((V_r^*)^{-1}u\right) - \Phi_\infty(\eta,u)\right]dA_r,$$

et

$$\delta''_R(b,c,u) := A_R^{-1}\int_0^R L_r\left((V_r^*)^{-1}u\right)\left[\Phi_{r\wedge T_r}\left((V_r^*)^{-1}u\right) - \Phi_r\left((V_r^*)^{-1}u\right)\right]dA_r.$$

Par conséquent la relation (4.13) est immédiate dés que les deux propriétés suivantes sont vérifiées

$$\Delta_R\left(b,c,u\right) + \delta'_R(b,c,u) + \delta''_R(b,c,u) \to 0 \tag{4.16}$$

et

$$A_R^{-1}\int_0^R \Big[L_{r\wedge T_r}\left((V_r^*)^{-1}u\right) - 1\Big]dA_r \to 0 \ p.s.. \tag{4.17}$$

### 4.1.1 Vérification de la propriété (4.16)

Comme $L_r\big((V_r^*)^{-1}u\big) \le c$ on en déduit que

$$|\delta'_R(b,c,u)| \le c\,A_R^{-1}\int_0^R \big|\Phi_r\big((V_r^*)^{-1}u\big) - \Phi_\infty(\eta,u)\big| dA_r.$$

Ainsi vu l'hypothèse $(\mathcal{H})$ il vient que

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\left|\delta'_R\left(b,c,u\right)\right| \longrightarrow 0 \text{ p.s.}.$$

Par ailleurs, on voit que

$$\Delta_R(b,c,u) \vee \delta''_R(b,c,u) \le 2cA_R^{-1}\int_0^R \mathbf{1}_{\{T_r<r\}} dA_r.$$

Or on sait que d'une part

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\{T_r\,<\,r\}} &\le \mathbf{1}_{\{T_r^b\,<\,r\}} + \mathbf{1}_{\{T_r^c(u)\,<\,r\}}\\ &\le \mathbf{1}_{E_r^b} + \mathbf{1}_{E_r^{u,c}}\end{aligned}$$

et que d'autre part $\mathbb{P}(\mathrm{tr}(C)=b) = \mathbb{P}(|\Phi_\infty(\eta,u)|^{-1}=c)=0$. Par conséquent, à l'aide des hypothèses $(\mathcal{H}1)$ et $(\mathcal{H})$ il vient que

$$\limsup_{R\to\infty} \Delta_R(b,c,u)\vee\delta''_R(b,c,u) \le 2c\Big(\mathbf{1}_{\{\mathrm{tr}(C)\,>\,b\}} + \mathbf{1}_{\{|\Phi_\infty(\eta,u)|^{-1}\,>\,c\}}\Big).$$

Ainsi en faisant tendre $b$ et $c$ de manière séquentielle et de sorte qu' on ait toujours $\mathbb{P}(\mathrm{tr}(C)=b) = \mathbb{P}(|\Phi_\infty(\eta,u)|^{-1}=c)=0$, on obtient que

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\left|\delta_R\left(b,c,u\right)\right| \longrightarrow 0 \text{ p.s.}.$$

En vue de simplifier les notations on pose

$$\tilde{L}_r(u) := L_{r\wedge T_r}\big((V_r^*)^{-1}u\big).$$

Le reste de la preuve du théorème, consiste à établir la convergence p.s. des moyennes $A_R^{-1}\int_0^R \tilde{L}_r(u)dA_r$ vers 1. On se propose alors de montrer d'abord que cette convergence à lieu en moyenne quadratique. D'où l'étape cruciale suivante consacrée à l'estimation de la covariance du couple $\big(\tilde{L}_r(u),\tilde{L}_\rho(u)\big)$.

### 4.1.2 Estimation de la covariance du couple $\left(\tilde{L}_r\left(u\right),\tilde{L}_\rho\left(u\right)\right)$.

Pour tous $u\in\mathbb{R}^d$, $(\rho,r)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ avec $\rho\le r$, notons

$$K_{\rho,r}\left(u\right) := \mathbb{E}\left\{\left(\tilde{L}_\rho\left(u\right)-1\right)\overline{\left(\tilde{L}_r\left(u\right)-1\right)}\right\}.$$

Comme $\left(L_{r,t\wedge T_r}(u)\right)_{t\geq 0}$ est une martingale on vérifie aisément que :

$$\begin{aligned}K_{\rho,r}(u) &= \mathbb{E}\left\{\tilde{L}_\rho(u)\,\overline{\tilde{L}_r(u)}\right\} - 1\\ &= \mathbb{E}\left\{\tilde{L}_\rho(u)\,\overline{\mathbb{E}\left\{\tilde{L}_r(u)\,/\mathfrak{F}_{\rho\wedge T_\rho}\right\}}\right\} - 1;\\ &= \mathbb{E}\left\{\tilde{L}_\rho(u)\,\overline{L_{\rho\wedge T_\rho}\left((V_r^*)^{-1}u\right)}\right\} - 1\\ &= \mathbb{E}\left\{\tilde{L}_\rho(u)\,\left[\overline{L_{\rho\wedge T_\rho}\left((V_r^*)^{-1}u\right)} - 1\right]\right\}\end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité de Cauchy Schwarz donne

$$\begin{aligned}|K_{\rho,r}(u)| &\leq \left(\mathbb{E}\left|\tilde{L}_\rho(u)\right|^2\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left|L_{\rho\wedge T_\rho}\left((V_r^*)^{-1}u\right)-1\right|^2\right)^{1/2}\\ &\leq \left(\mathbb{E}\left|L_\rho(u)\right|^2\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left|L_{\rho\wedge T_\rho}\left((V_r^*)^{-1}u\right)\right|^2-1\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Or de l'inégalité (4.11) on voit que d'une part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|L_\rho(u)\right|^2 &\leq \mathbb{E}\exp\left\{\, u^*\, V_\rho^{-1}\,\langle M\rangle_{\rho\wedge T_\rho}\ (V_\rho^*)^{-1}\ u\right\}\\ &\leq \exp\left\{b\,\|u\|^2\right\}\end{aligned}$$

et que d'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|L_{\rho\wedge T_\rho}\left((V_r^*)^{-1}u\right)\right|^2 &\leq \exp\left\{\, u^*\, V_r^{-1}\,\langle M\rangle_{\rho\wedge T_\rho}\ (V_r^*)^{-1}\ u\right\}\\ &\leq \exp\left\{b\,\|u\|^2\left\|V_r^{-1}V_\rho\right\|^2\right\}.\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité : $\forall t > 0,\ \ e^t - 1 \leq te^t$ il vient que

$$\mathbb{E}\left|L_{\rho\wedge T_\rho}\left((V_r^*)^{-1}u\right)\right|^2 - 1 \leq b\,\|u\|^2\left\|V_r^{-1}V_\rho\right\|^2\exp\left\{b\,\|u\|^2\left\|V_r^{-1}V_\rho\right\|^2\right\}.$$

La preuve du lemme suivant est explicitée dans la dernière section.

**Lemme 4.3.** *Si la normalisation $(V_r)$ vérifie les conditions $(\mathcal{C})$ alors, pour tout $(r,\rho)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ avec $\rho\leq r$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que*

$$\left\|V_r^{-1}V_\rho\right\|^2 \leq d^{n_0}\left(\frac{\det V_\rho}{\det V_r}\right)^{\frac{2}{d}}.$$

En tenant compte du résultat précédent il vient que

$$|K_{\rho,r}(u)| \leq c^{te}\left(\frac{\det V_\rho}{\det V_r}\right)^{\frac{2}{d}} \tag{4.18}$$

pour une constante indépendante de $\rho$ et de $r$.

### 4.1.3 Convergence presque sûre de $A_R^{-1}\int_0^R \tilde{L}_r\,(u)\,dA_r$ vers 1.

Dans la suite on vérifie d'abord que

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_0^R \left(\tilde{L}_r(u)-1\right)dA_r\right|^2\right\} = O\left(A_R\right)(R\to\infty)\,, \tag{4.19}$$

En effet,

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_0^R \left(\tilde{L}_r(u)-1\right)dA_r\right|^2\right\} = 2\int_0^R\int_0^r K_{\rho,r}\,dA_\rho\,dA_r$$

et par l'inégalité (4.18), il vient que

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_0^R \left(\tilde{L}_r(u)-1\right)dA_r\right|^2\right\} \le c^{te}\int_0^R\int_0^r\left|\frac{\det V_\rho}{\det V_r}\right|^{\frac{2}{d}} dA_\rho\,dA_r. \tag{4.20}$$

Or, en utilisant la relation (4.8) on voit que

$$\begin{aligned}\frac{\det V_\rho}{\det V_r} &= \exp\Big\{-\int_\rho^r \operatorname{tr}\big[V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big]\,ds\Big\}\\ &= \exp\Big\{-\int_\rho^r \operatorname{tr}\big[a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big]\,dA_s\Big\}\end{aligned}$$

et donc par la condition $(\mathcal{C}3)$ il vient que

$$\frac{\det V_\rho}{\det V_r} = \exp\Big\{-\operatorname{tr}\,[U](A_r-A_\rho)-\int_\rho^r \Delta_s\,dA_s\Big\}.$$

On en déduit alors qu' il existe $r_0>0$ tel que $\forall r\ge r_0$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^r \Big(\frac{\det V_\rho}{\det V_r}\Big)^{\frac{d}{2}}dA_\rho &\le \int_0^r \exp\Big\{-\frac{d}{4}\operatorname{tr}\,[U](A_r-A_\rho)\Big\}\,dA_\rho\\ &\le \frac{4}{d\operatorname{tr}U}\Big[1-\exp\Big\{-\frac{d}{4}\operatorname{tr}\,[U]A_r\Big\}\Big]\\ &\le \frac{4}{d\operatorname{tr}U}\end{aligned}$$

puisque $U$ est une matrice définie positive. D'où le résultat annocé en (4.19). Ainsi, $A_R^{-1}\int_0^R \tilde{L}_r\,(u)\,dA_r$ tend vers 1 en moyenne quadratique. Posant

$$R_k = \inf\{\,r\ /\ \forall\,t>r,\quad A_t>k^2\},$$

il est clair que $A_{R_k}=O(k^2)$ $(k\to\infty)$. Ainsi il vient que

$$\mathbb{E}\left\{\left|A_{R_k}^{-1}\int_0^{R_k}\left(\tilde{L}_r(u)-1\right)dA_r\right|^2\right\} = O\left(k^{-2}\right)(k\to\infty)\,,$$

on en déduit alors que

$$A_{R_k}^{-1}\int_0^{R_k}\tilde{L}_r(u)dA_r \to 1 \ \text{ p.s..}$$

Or pour $R \in [R_k, R_{k+1}[$ on a :

$$\begin{aligned}
&\Big|A_R^{-1}\int_0^R\big(\tilde{L}_r(u)-1\big)dA_r - A_{R_k}^{-1}\int_0^{R_k}\big(\tilde{L}_r(u)-1\big)dA_r\Big|\\
&\quad\le \Big|A_R^{-1}\int_0^R\big(\tilde{L}_r(u)-1\big)dA_r - A_R^{-1}\int_0^{R_k}\big(\tilde{L}_r(u)-1\big)dA_r\Big|\\
&\quad+\Big|A_R^{-1}\int_0^{R_k}\big(\tilde{L}_r(u)-1\big)dA_r - A_{R_k}^{-1}\int_0^{R_k}\big(\tilde{L}_r(u)-1\big)dA_r\Big|\\
&\quad\le A_{R_k}^{-1}\int_{R_k}^{R_{k+1}}\big(|\tilde{L}_r(u)|+1\big)\,dA_r + |A_R^{-1}-A_{R_k}^{-1}|\int_0^{R_k}\big(|\tilde{L}_r(u)|+1\big)\,dA_r\\
&\quad\le 2(1+c)A_{R_k}^{-1}\big(A_{R_{k+1}}-A_{R_k}\big)\\
&\quad= O\Big(\frac{1}{k}\Big)\ (k\to\infty).
\end{aligned}$$

Puisque $\big(A_{R_{k+1}}-A_{R_k}\big)=O\Big(k\Big)$. Ce qui achève la preuve du Théorème 3.1. $\square$

### 4.2 Preuve du Théorème 3.2

Pour $Z_t := V_t^{-1}M_t$ et $S = U + U^*$ ($S$ étant la matrice régulière de la condition $(\mathcal{C}_3)$), La première partie de cette preuve consiste à démontrer la relation suivante

$$A_t^{-1}\big(\|Z_t\|^2+\int_0^t Z_{s_-}{}^*SZ_{s_-}dA_s\big)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\operatorname{tr}\big(C^{1/2}SC^{1/2}\big)\ \ p.s.. \tag{4.21}$$

En effet, en appliquant la formule d'Itô à la semimartingale $\|Z_t\|^2$ on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\|Z_t\|^2 = 2\int_0^t Z_{s_-}^*V_s^{-1}dM_{s_-} + \operatorname{tr}\big(\int_0^t (V_s^*)^{-1}V_s^{-1}d[M]_s\big)\\
-\int_0^t Z_{s_-}^*V_s{}^{-1}d(V_sV_s^*)(V_s^*)^{-1}Z_{s_-},
\end{aligned}\tag{4.22}$$

Dans la suite on pose :

$$D_t = \int_0^t Z_{s_-}^*V_s^{-1}d(V_sV_s^*)(V_s^*)^{-1}Z_{s_-},$$

$$K_t = \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} \quad \text{et} \quad L_t = \int_0^t Z_{s_-}^* V_s^{-1} dM_{s_-}.$$

Avec ces notations, l'égalité (4.22) s'écrit :

$$\|Z_t\|^2 + D_t = 2L_t + \operatorname{tr}(K_t) \tag{4.23}$$

et on a les résultats suivants

**Lemme 4.4.**

$$\frac{K_t}{A_t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} CU^* + UC \ \ p.s.. \tag{4.24}$$

*Preuve.* Par la formule d'intégration par parties on voit que

$$\begin{aligned} d\big(V_s^{-1}[M]_s(V_s^*)^{-1}\big) = V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1} - V_s^{-1}(dV_s)V_s^{-1}[M]_s(V_s^*)^{-1} \\ - V_s^{-1}[M]_s(V_s^*)^{-1}(dV_s)^*(V_s^*)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

donc

$$K_t = C'_t + \int_0^t C'_s (V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds})^* ds + \int_0^t (V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}) C'_s ds$$

avec $C'_t := V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1}$. Par conséquent,

$$K_t = C'_t + \int_0^t C'_s (a_s^{-1} V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds})^* dA_s + \int_0^t (a_s^{-1} V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}) C'_s \, dA_s.$$

Vu l'hypothèse ($\mathcal{H}2$) et les conditions ($C$), on déduit le résultat par lemme de Toeplitz. □

**Lemme 4.5.**

$$D_t \sim \int_0^t Z_s^* S Z_s dA_s \ \ p.s. \ \ (t \to \infty). \tag{4.26}$$

*Preuve.* On a

$$D_t = \int_0^t Z_{s_-}^* V_s^{-1} d(V_s V_s^*)(V_s^*)^{-1} Z_{s_-} = \int_0^t Z_s^* \Big[\big(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big) + \big(V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big)^*\Big] Z_s \, ds,$$

ainsi compte tenu des conditions ($C$) et du Lemme de Toeplitz, on déduit aisément le résultat annoncé. □

**Lemme 4.6.**

$$L_t = o(A_t) \ \ p.s.. \tag{4.27}$$

*Preuve.* La variation quadratique prévisible de la martingale locale $(L_t)_{t\geq 0}$ vaut :

$$\langle L\rangle_t = \int_0^t Z_s^* V_s^{-1} d\langle M\rangle_s (V_s^*)^{-1} Z_s = \int_0^t Z_{s_-}^* d\tilde{K}_s Z_{s_-}$$

où

$$\tilde{K}_t = \int_0^t V_s^{-1} d\langle M\rangle_s (V_s^*)^{-1},$$

est le compensateur prévisible du processus $(K_t)_{t\geq 0}$. En utilisant une décomposition semblable à celle de $K_t$, on vérifie que

$$\tilde{K}_t = C_t + \int_0^t C_s \big(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}\big) ds + \int_0^t \big(V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}\big) C_s ds$$

avec $C_t = V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1}$. Par suite

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle_t &= \int_0^t Z_{s-}^* \, dC_s Z_{s-} + \int_0^t Z_{s-}^* \Big[ C_s \big(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}\big)^* + \big(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}\big) C_s \Big] Z_{s-} \, dA_s \\
&= \int_0^t \operatorname{tr}(Z_{s-} Z_{s-}^* \, dC_s) \\
&\qquad + \int_0^t \operatorname{tr} \Big[ Z_{s-} Z_{s-}^* \Big[ C_s \big(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}\big)^* + \big(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}\big) C_s \Big] \Big] dA_s \\
&= O\Big( \int_0^t \|Z_s\|^2 \operatorname{tr}(dC_s) \Big) \\
&\qquad + O\left( \int_0^t \|Z_s\|^2 \operatorname{tr} \Big[ \Big[ C_s \big(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}\big)^* + \big(a_s^{-1} V_s^{-1} \frac{dV_s}{ds}\big) C_s \Big] \Big] dA_s \right)
\end{aligned}$$

Vu l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$,on obtient par le Lemme de Toeplitz :

$$\langle L \rangle_t = O\Big( \int_0^t \|Z_s\|^2 \operatorname{tr}(dC_s) \Big) + O(D_t) \;\; p.s..$$

La formule d'intégration par parties et la relation (4.23) donnent :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|Z_s\|^2 \operatorname{tr}(dC_s) &= \|Z_t\|^2 \operatorname{tr}(C_t) + \int_0^t \operatorname{tr}(C_s) \, dD_s \\
&\quad - \int_0^t \operatorname{tr}(C_s) \operatorname{tr}(dK_s) - 2 \int_0^t \operatorname{tr}(C_s) \, dL_s \\
&= O(\|Z_t\|^2 + D_t + \operatorname{tr}(K_t) + \tilde{L}_t).
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{L}_t := \int_0^t \operatorname{tr}(C_s) \, dL_s.$$

Deux cas sont alors possibles

- soit $\langle \tilde{L} \rangle_\infty < \infty$ on déduit alors que $\tilde{L}_t = O(D_t)$

- soit $\langle \tilde{L} \rangle_\infty = \infty$ et on conclut par la loi forte des grands nombres pour les martingales scalaires que $\tilde{L}_t = o(\langle L \rangle_t)$. Ainsi on voit que

$$\int_0^t \|Z_s\|^2 \operatorname{tr}(dC_s) = O(\|Z_t\|^2 + D_t + \operatorname{tr}(K_t)),$$

et par conséquent

$$\langle L\rangle_t = O\big(\|Z_t\|^2 + D_t + \mathrm{tr}(K_t)\big) \ \ p.s..$$

Encore une fois, la loi forte des grands nombres pour les martingales scalaires assure que

$$L_t = o\big(\|Z_t\|^2 + D_t + \mathrm{tr}(K_t)\big) \ \ p.s.. \tag{4.28}$$

Compte tenu du Lemme 4.4 et de la relation (4.23), on conclut que :

$$L_t = o(A_t) \ \ p.s.. \tag{4.29}$$

$\square$

Par conséquent la relation

$$A_t^{-1}\big(\|Z_t\|^2 + \int_0^t {Z_s}^* S Z_s \, dA_s\big) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{tr}\big(C^{1/2} S C^{1/2}\big) \ \ p.s., \tag{4.30}$$

découle aisément de la relation (4.23) et des lemmes 4.4, 4.5 et 4.6.

Compte tenu de la preuve du Théorème 3.1 et sous les hypothèses $(\mathcal{H}1)$ et $(\mathcal{H})$, on a que

$$\tilde{\mu}_t := A_t^{-1} \int_0^t \delta_{Z_s} \, dA_s \Longrightarrow \mu_\infty \ \ p.s..$$

On en déduit alors que

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} x^* S x \, d\tilde{\mu}_t(x) \geq \int_{\mathbb{R}^d} x^* S x \, d\mu_\infty(x) \ \ p.s..$$

Or, d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}3)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^* S x \, d\mu_\infty(x) = \mathrm{tr}\big(S \int x^* x \, d\mu_\infty(x)\big) = \mathrm{tr}(SC) = \mathrm{tr}\big(C^{1/2} S C^{1/2}\big)$$

donc

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} A_t^{-1} \int_0^t {Z_s}^* S Z_s \, dA_s \geq \mathrm{tr}\big(C^{1/2} S C^{1/2}\big) \ \ p.s.. \tag{4.31}$$

Vu les propriétés (4.21) et (4.31), on conclut que

$$\lim_{t\to\infty} A_t^{-1} \int_0^t {Z_s}^* S Z_s \, dA_s = \mathrm{tr}\big(C^{1/2} S C^{1/2}\big). \tag{4.32}$$

et on déduit la loi du logarithme à savoir

$(L.L)$ $\ \|V_t^{-1} M_t\|^2 = o(A_t)$ $p.s.$ $(t \to \infty)$.

Par ailleurs, $S$ est inversible. On en déduit alors, à l'aide de (4.32) et du fait que

$$\log(\det V_t^2) \sim \mathrm{tr}(S) A_t \ \ (t \to \infty)$$

(voir la relation (4.9)), la validité de la propriété (LFQ). Ce qui achève la preuve.

### 4.3 Preuve du Théorème 3.3.

Posant $\theta_t := V_t^{-1}\big(M_t M_t^* - [M]_t\big)(V_t^*)^{-1}$, on a le lemme suivant

**Lemme 4.7.**

$$A_t^{-1/2}\int_0^t \mathrm{tr}(\theta_s)\,dA_s - \big(\log(\det V_t^2)\big)^{-1/2}\int_0^t \big(\mathrm{tr}[S]\big)^{-1/2}\,\mathrm{tr}(\theta_s)d\big(\log(\det V_s^2)\big) \to 0 \;\; p.s. \quad (t\to\infty).$$

*Preuve.* D'aprés la relation (4.9) on voit que

$$\Big[\frac{A_t}{\mathrm{tr}(S)\log(\det V_s^2)}\Big]^{-1/2} \to \mathrm{tr}(S) \quad (t\to\infty).$$

D'autre part, en utlisant la relation (4.7) et la condition ($\mathcal{C}3$) on obtient

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \mathrm{tr}(\theta_s)\,dA_s}{\int_0^t \mathrm{tr}(\theta_s)d\big(\log(\det V_s^2)\big)} = \lim_{t\to\infty}\frac{a_t}{2\,\mathrm{tr}\big[V_t^{-1}\frac{dV_t}{dt}\big]} = \frac{1}{\mathrm{tr}(S)}, \tag{4.33}$$

ce qui achève la preuve du Lemme. □

Ainsi, on se ramène à démontrer que

$$A_t^{-1/2}\int_0^t \mathrm{tr}\big[\theta_s\big]\,dA_s \Rightarrow 2\sqrt{\mathrm{tr}\big(\tilde{C}RCR\big)}G$$

où $G$ est une gaussienne centrée réduite et $R$ désigne la matrice symétrique, positive solution de l'équation de Lyapounov :

$$I = RU + U^*R,$$

$U$ étant la matrice de la condition ($\mathcal{C}$).

#### 4.3.1 Une relation fondamentale.

Posant $Z_t = V_t^{-1}M_t$, alors la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} Z_t Z_t^* = &\int_0^t V_s^{-1}(dM_{s_-})M_{s_-}^*(V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1}M_{s_-}(dM_{s_-})^*(V_s^*)^{-1} \\ &- \int_0^t V_s^{-1}(dV_s)V_s^{-1}M_{s_-}M_{s_-}^*(V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1}d[M]_s(V_s^*)^{-1} \\ &- \int_0^t V_s^{-1}M_{s_-}M_{s_-}^*(V_s^*)^{-1}(dV_s)^*(V_s^*)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Plus précisément, on a appliqué la formule d'Itô à la forme quadratique $(\langle u, Z_t\rangle^2)$ avec $u\in\mathbb{R}^d$ et on obtient l'expression précédente par polarisation.

En utilisant l'expression (4.25) on obtient la relation fondamentale suivante :

$$\theta_t + \int_0^t V_s^{-1} dV_s \theta_s + \int_0^t \theta_s (dV_s)^* (V_s^*)^{-1} = H_t + H_t^*. \tag{4.35}$$

avec

$$H_t = \int_0^t V_s^{-1} M_{s_-} (dM_{s_-})^* (V_s^*)^{-1}.$$

Désormais, pour $u \in \mathbb{R}^d$, on pose :

$$H_t^u := \int_0^t V_s^{-1} M_{s_-} (dM_{s_-})^* (V_s^*)^{-1} u. \tag{4.36}$$

Notre objectif est de démontrer un théorème limite centrale pour la martingale $H^u$. Pour celà, on va étudier le comportement asymptotique du crochet oblique de cette martingale ainsi que la condition de Lindeberg qui lui est associée.

### 4.3.2 Comportement asymptotique de $(\langle H^u \rangle_t)_{t \geq 0}$

Dans la suite, on démontre la proposition suivante

**Proposition 4.1.**

$$\frac{\langle H_t^u \rangle}{A_t} \to u^* \tilde{C} u C \;\; p.s.. \tag{4.37}$$

*Preuve.* $(H_t^u)$ est une martingale vectorielle de variation quadratique prévisible :

$$\begin{aligned}
\langle H^u \rangle_t &= \int_0^t V_s^{-1} M_{s_-} \big[ u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u \big] (M_{s_-})^* (V_s^*)^{-1} \\
&= \int_0^t Z_s \big[ u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u \big] Z_s^*.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

On en déduit alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$\begin{aligned}
x^* \langle H^u \rangle_t x &= \int_0^t x^* Z_s \big[ u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u \big] Z_s^* x \\
&= \int_0^t \langle x, Z_s \rangle^2 \big[ u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u \big].
\end{aligned}$$

On pose alors

$$F_t(u) := \int_0^t \exp(A_s) u^* V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} u ds.$$

Ainsi par la formule d'intégration par partie on déduit que :

$$x^* \langle H^u \rangle_t x = \exp(-A_t) F_t(u) \langle x, Z_t \rangle^2 + \int_0^t \exp(-A_s) F_s(u) \langle x, Z_s \rangle^2 d(A_s) - G_t \tag{4.39}$$

avec

$$G_t := \int_0^t \exp(-A_s)F_s(u)d(\langle x, Z_s\rangle^2).$$

Le résultat suivant est utile pour la suite

**Lemme 4.8.**

$$\exp(-A_t)F_t(u) \to u^*\tilde{C}u \quad p.s., \tag{4.40}$$

*avec* $\tilde{C} = UC + CU^*$ *; U étant la matrice introduite dans* $(C3)$.

*Preuve.* Par la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}F_t(u) &= \exp(A_t)u^*V_t^{-1}\langle M\rangle_t(V_t^*)^{-1}u - \int_0^t u^*V_s^{-1}\langle M\rangle_s(V_s^*)^{-1}ud\big(\exp(A_s)\big)\\ &+ \int_0^t u^*\big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big)V_s^{-1}\langle M\rangle_s(V_s^*)^{-1}ud\big(\exp(A_s)\big)\\ &+ \int_0^t u^*V_s^{-1}\langle M\rangle_s(V_s^*)^{-1}\big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big)^*ud\big(\exp(A_s)\big).\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$ et le lemme de Toeplitz on voit que :

$$\frac{1}{\exp(A_t)-1}\Big(\exp(A_t)u^*V_t^{-1}\langle M\rangle_t(V_t^*)^{-1}u - \int_0^t u^*V_s^{-1}\langle M\rangle_s(V_s^*)^{-1}ud\big(\exp(A_s)\big)\Big) \to 0 \quad \text{p.s.}$$

et d' autre part d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$, le lemme de Toeplitz et la condition $(C3)$ on obtient que :

$$\frac{1}{exp(A_t)-1}\Big(\int_0^t u^*\big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big)V_s^{-1}\langle M\rangle_s(V_s^*)^{-1}ud\big(\exp(A_s)\big) + \int_0^t u^*V_s^{-1}\langle M\rangle_s(V_s^*)^{-1}\big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big)^*ud\big(\exp(A_s)\big)\Big) \to \tilde{C} = UC+CU^* \quad \text{p.s.}$$

ce qui achève la démonstration. □

Par conséquent, en combinant le lemme précédent et la propriété (LL) on voit immédiatement que :

$$\exp(-A_t)F_t(u)\langle x, Z_t\rangle^2 = o(A_t) \quad \text{p.s.} \tag{4.41}$$

Par ailleurs, d'aprés le lemme 4.8 et la propriété (LFQ), il vient que :

$$A_t^{-1}\int_0^t \exp(-A_s)F_s(u)\langle x, Z_s\rangle^2 d(A_s) \to u^*\tilde{C}ux^*Cx \quad \text{p.s.}. \tag{4.42}$$

Dans la suite on s'interresse au comportement asymptotique de $G$. Vu le Lemme 4.8, il est clair que

$$G_t = O\big(\langle x, Z_t\rangle^2\big) \tag{4.43}$$

donc par la propriété (LL) on a

$$G_t = o(A_t) \quad p.s.. \tag{4.44}$$

Compte tenu de l'expression (4.39) des relations (4.41),(4.42) et (4.44) on conclut que

$$\frac{\langle H_t^u \rangle}{A_t} \to u^* \tilde{C} u C \ \text{ p.s..} \tag{4.45}$$

Ce qui achève la preuve. □

### 4.3.3 Vérification de la condition de Lindeberg pour la martingale $(H_t^u)_{t \geq 0}$

**Définition 4.1.** *Soient $A = (A_t), B = (B_t)$ deux processus croissants issus de 0. On dit que $A$ est* ***dominé au sens fort*** *par $B$,et on écrit : $A << B$, si $(B_t - A_t; t \geq 0)$ est un procssus croissant.*

Le résultat utile suivant est évident :

**Lemme 4.9.** *Si $A << B$, leurs compensateurs prévisibles $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ vérifient aussi $\widetilde{A} << \widetilde{B}$ .*

**Application à la martingale** $(H_t)$
Le saut à l'instant $t$ de la martingale matricielle :

$$H_t = \int_0^t Z_{s-} d(^* M_s)^* V_s^{-1}, \ Z_t = V_t^{-1} M_t \ ,$$

vaut :

$$\Delta H_t = Z_{t-}{}^* (\Delta M_t)^* V_t^{-1};$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\Delta H_t\|^2 &= tr\{\Delta H_t \ {}^* \Delta H_t\} = \|Z_{t-}\|^2 \|V_t^{-1} \Delta M_t \ \|^2 \\ &= \|Z_{t-}\|^2 V_t^{-1} \Delta [M]_t^* V_t^{-1} = \|Z_{t-}\|^2 \Delta \Lambda_t \end{aligned}$$

où $(\Lambda_t)$ est le processus croissant :

$$\Lambda_t = \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s^* V_s^{-1}.$$

Pour $r > 0$, $t > 0$, posant :

$$\sigma_t^H(r) = \sum_{s \ \leq \ t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{ \ \|\Delta H_s\| > r \ \}},$$

la condition de Lindeberg au sens de la convergence presque sure pour la martingale $H$ s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \quad A_t^{-1} \widetilde{\sigma_t^H(\epsilon \sqrt{A_t})} \to 0, \quad t \to +\infty, \ \text{p.s.} \tag{4.46}$$

Pour établir ce résultat, on exploite les deux lemmes suivants :

**Lemme 4.10.** *L'hypothèse $(\mathcal{H}2)$ implique que presque surement*

$$\sup_{t>0} \|V_t^{-1}\Delta M_t\| < +\infty.$$

*Preuve.* En effet, on a :

$$\sum_{s\leq .} \Delta M_s\ ^*(\Delta M_s) << [M].$$

ce qui implique que

$$\sum_{s\leq t} \|V_t^{-1}\Delta M_s\ \|^2 \leq tr\{V_t^{-1}[M]_t^* V_t^{-1}\};$$

d'où le résultat du lemme, car

$$\|V_t^{-1}\Delta M_t\ \|^2 \leq \sum_{s\leq t} \|V_t^{-1}\Delta M_s\ \|^2 \leq tr\{V_t^{-1}[M]_t^* V_t^{-1}\} = O(1) \text{ p.s. }.$$

□

**Lemme 4.11.** *Etant donné $\alpha \in ]0,1]$, alors :*

$$\sigma_.^H(\alpha^{-3}) << \sigma_.^1(\alpha^{-1}) + \sigma_.^2(\alpha^{-1})$$

*où pour $t>0$, $r>0$ :*

$$\sigma_t^1(r) = \sum_{s\leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|Z_{s-}\|>r\ \}} \quad ; \quad \sigma_t^2(r) = \sum_{s\leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|V_s^{-1}\Delta M_s\|>r\ \}}$$

*Preuve.* L'assertion du lemme découle de la décomposition évidente suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_t^H(\alpha^{-3}) = &\sum_{s\leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\ , \|Z_{s-}\|>\alpha^{-1}\ \}} \\ &+ \sum_{s\leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\ ,\ \|Z_{s-}\|\leq \alpha^{-1},\ \|V_s^{-1}\Delta M_s\|\leq\ \alpha^{-1}\ \}} \\ &+ \sum_{s\leq t} \|\Delta H_s\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|\Delta H_s\|>\alpha^{-3}\ ,\ \|Z_{s-}\|\leq \alpha^{-1},\ \|V_s^{-1}\Delta M_s\|>\ \alpha^{-1}\ \}}.\end{aligned}$$

Il est clair que le premier (resp le troisième) terme du membre de droite de cette égalité est dominé au sens fort par $(\sigma_t^1(\alpha^{-1}))$ (resp. $(\sigma_t^2(\alpha^{-1})) = (\sigma_t^2(\min(\alpha^{-1}, \alpha^{-2}))$ ). Pour le deuxième terme, on remarque

$$\begin{aligned}\{\ \|\Delta H_s\| > \alpha^{-3},\ \|Z_{s-}\| \leq \alpha^{-1},\ \|V_s^{-1}\Delta M_s\| \leq\ \alpha^{-1}\} \subset \\ \{\ \|Z_{s-}\|\ \leq \alpha^{-1},\ \|Z_{s-}\| \geq \alpha^{-2}\ \} = \emptyset \text{ p.s.}\end{aligned}$$

d'après le choix de $\alpha$. Le lemme est établi. □

**Corollaire 4.1.** *Avec les notations du lemme 3, on a :*

$$\sigma^1_\cdot(r) << \int_0^\cdot \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|Z_{s-}\|>r\ \}} d\Lambda_s \quad , \quad \sigma^2_\cdot(r) << \int_0^\cdot \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\Delta\ \Lambda_s\ >\ r^2\ \}} d\Lambda_s.$$

*Par conséquent, pour tout $t \geq 0$ :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma^1_t(r)} &\leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|Z_{s-}\|>r\ \}} d\widetilde{\Lambda_s}\ , \\
\widetilde{\sigma^2_t(r)} &\leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \Delta\Lambda_s>r^2\ \}} d\widetilde{\Lambda_s} \leq \mathbf{1}_{\{\ \sup_{s\ \leq\ t} \Delta\Lambda_s\ >\ r^2\ \}} \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 d\widetilde{\Lambda_s}\ ,
\end{aligned}$$

*avec*

$$\widetilde{\Lambda_t} = \int_0^t V_s^{-1} d < M >_s^* V_s^{-1}.$$

**Validité de la condition de Lindeberg**

Compte tenu de ce qui précède, pour tous $\alpha \in ]0,1[$ , $\epsilon > 0$ et $t > 0$, on a

$$\overline{\lim_t}\ A_t^{-1} \widetilde{\sigma_t^H(\epsilon\sqrt{A_t})}\ \leq \overline{\lim_t}\ A_t^{-1} \widetilde{\sigma_t^H(\alpha^{-3})}.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma_t^H(\alpha^{-3})}\ \leq \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|Z_{s-}\|>\alpha^{-1}\ \}} d\widetilde{\Lambda_s} \\
+ \mathbf{1}_{\{\ \sup_{s\ \leq\ t} \Delta\Lambda_s\ >\ \alpha^{-2}\ \}} \int_0^t \|Z_{s-}\|^2 d\widetilde{\Lambda_s},
\end{aligned}$$

donc par la loi forte quadratique, pour tous $\alpha \in ]0,1[$ , $\epsilon > 0$ :

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_t}\ A_t^{-1} \widetilde{\sigma_t^H(\epsilon\sqrt{A_t})}\ \leq \int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\ \|x\|>\alpha^{-1}\ \}} d\mu_\infty(x) \\
+ \mathbf{1}_{\{\ \sup_{s\ \geq\ 0} \Delta\Lambda_s\ >\ \alpha^{-2}\ \}} \int_0^{+\infty} \|x\|^2 d\mu_\infty(x) \quad \text{p.s.}
\end{aligned}$$

ce qui implique que la condition de Lindeberg est vérifiée.

### 4.3.4 Fin de la preuve du Théorème 3.3

Vu les propriétés (4.37) et (4.46), le (TLCG) s'applique pour la martingale vectorielle $H^u$ et on a :

$$A_t^{-1/2} H_t \Rightarrow \mathfrak{N}_{d\times d}(0,\ \tilde{C} \otimes C)$$

où $\tilde{C} = (UC + CU^*)$ . De l'égalité (4.35), il vient que pour toute matrice symétrique positive $R$ on a

$$A_t^{-1/2}\operatorname{tr}\big(R\theta_t\big) + A_t^{-1/2}\int_0^t \operatorname{tr}\Big\{\big[RV_s^{-1}dV_s + (V_s^{-1}dV_s)^*R\big]\theta_{s_-}\Big\} \Rightarrow 2\sqrt{\operatorname{tr}\big(\tilde{C}RCR\big)}G$$

où $\theta_t = V_t^{-1}\big(M_tM_t^* - [M]_t\big)(V_t^*)^{-1}$ et $G$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Par conséquent, comme $Z_t = V_t^{-1}M_t$ converge en loi et comme $V_t^{-1}[M]_t(V_t^*)^{-1}$ converge p.s., on en déduit que

$$A_t^{-1/2}\int_0^t \operatorname{tr}\Big\{\Big[R\big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big) + \big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big)^*R\Big]\theta_s\Big\}\,dA_s \Rightarrow 2\sqrt{\operatorname{tr}\big(\tilde{C}RCR\big)}G$$

Compte tenu de la condition $(\mathcal{C}3)$ et de la $(L.L)$ qui garantie que $\theta_t = o(A_t)$ *p.s.*, on obtient que

$$\int_0^t \operatorname{tr}\Big\{\Big[R\big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds} - U\big) + \big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds} - U\big)^*R\Big]\theta_s\Big\}\,dA_s = o\Big(\int_0^t A_s^{-1/2}\,dA_s\Big) = o(A_t^{1/2})\ \ p.s.. \tag{4.47}$$

Ainsi pour $R$ solution de l'équation de Lyapounov $I = RU + U^*R$ il vient que :

$$A_t^{-1/2}\int_0^t \operatorname{tr}\{\theta_s\}\,dA_s \Rightarrow 2\sqrt{\operatorname{tr}(\tilde{C}RCR)}G \tag{4.48}$$

On conclut la preuve de la première partie du théorème par le Lemme 4.7. La deuxième partie du théorème est immédiate en remarquant que l'hypothèse ajoutée est équivalente à :

$$A_t^{\rho}\Big|\operatorname{tr}\big\{V_t^{-1}\big([M]_t\big)(V_t^*)^{-1} - C\big\}\Big| = O(1) \quad \text{p.s.}, \quad \rho > 1/2. \qquad \square$$

## 4.4 Preuve du Théorème 3.4

D'après la relation (4.35) et pour toute matrice symétrique, solution de l'équation de Lyapounov $RU + U^*R = I$, on a :

$$\operatorname{tr}\big(R\theta_t\big) + \int_0^t \operatorname{tr}\Big\{\Big[R\big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big) + \big(a_s^{-1}V_s^{-1}\frac{dV_s}{ds}\big)^*R\Big]\theta_s\Big\}\,dA_s = 2\operatorname{tr}\{RH_t\}. \tag{4.49}$$

Comme,

$$\mathbb{E}\big[\sup_t M_t(\Delta M_t)^*\big] < \infty \quad \text{implique que} \quad \mathbb{E}\big[\sup_t \Delta\operatorname{tr}\{RH_t\}\big] < \infty,$$

on en déduit par le Théorème 3 de **?** et par la relation (4.37) que la martingale scalaire $(\mathrm{tr}\{RH_t\})_{t\geq 0}$ vérifie une loi du logarithme itéré donnée par :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mathrm{tr}\{RH_t\}}{h(A_t)} \leq \sqrt{\mathrm{tr}\big(\tilde{C}RCR\big)} \quad \text{p.s.,} \tag{4.50}$$

où $h(u) = \sqrt{2u \log\log u}$ pour $u \geq e$. Compte tenu de la relation (4.47) et du fait que $\theta_t = o(A_t)$ on obtient que :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{h(A_t)} \int_0^t \mathrm{tr}\Big\{V_s^{-1}\big(M_sM_s^* - [M]_s\big)(V_s^*)^{-1}\Big\}\, dA_s \leq \sqrt{\mathrm{tr}\big(\tilde{C}RCR\big)} \quad \text{p.s..}$$

La fin de la preuve est similaire à celle de la preuve précédente.. □

## 4.5 Preuve des Théorèmes 3.5 et 3.6

Comme La normalisation scalaire est un cas particulier de la normalisation matricielle alors de l'égalité (4.35) et de la condition (3.4) on voit que

$$A_t^{-1/2}\theta_t + 2A_t^{-1/2} \int_0^t \theta_{s_-} v_s^{-1} dv_s \Rightarrow 2\sqrt{2\eta}\, CG$$

où $\theta_t = v_t^{-2}\big(M_tM_t^* - [M]_t\big)$ et $G$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Par conséquent, comme $Z_t = v_t^{-1}M_t$ converge en loi et comme $v_t^{-2}[M]_t$ converge p.s., on en déduit que

$$A_t^{-1/2} \int_0^t \theta_{s_-} a_s^{-1} v_s^{-1} v_s' \, dA_s \Rightarrow \sqrt{2\eta}\, CG$$

Compte tenu de la condition (3.4) et de la $(L.L)$ qui garantie que $\theta_t = o(A_t)$ $p.s.$, on obtient

$$\int_0^t \big(a_s^{-1} v_s^{-1} v_s' - \eta\big)\, dA_s = o\Big(\int_0^t A_s^{-1/2}\, dA_s\Big) = o(A_t^{1/2}) \;\; p.s.. \tag{4.51}$$

Ainsi on en déduit que

$$A_t^{-1/2} \int_0^t \mathrm{tr}\big\{\theta_s\big\}\, dA_s \Rightarrow (\sqrt{2\eta}\, C)\, G \tag{4.52}$$

On conclut la preuve de la première partie du théorème par le Lemme 4.7 qui reste valable pour une normalisation $V_t$ scalaire. La deuxième partie du Théorème 3.5 est immédiate en remarquant que l'hypothèse ajoutée est équivalente à :

$$A_t^{\rho}\Big|\big\{v_t^{-2}\big([M]_t\big) - C\big\}\Big| = O(1) \quad \text{p.s.,} \quad \rho > 1/2.$$

On donne à présent la preuve du Théorème 3.6. En effet, de la relation (4.35) on a :

$$\theta_t + 2\int_0^t \Big\{\big(a_s^{-1}v_s^{-1}v_s'\big)\theta_s\Big\}\, dA_s = 2H_t. \tag{4.53}$$

Comme,

$$\mathbb{E}\big[\sup_t M_t(\Delta M_t)^*\big] < \infty \quad \text{implique que} \quad \mathbb{E}\big[\sup_t \Delta H_t\big] < \infty,$$

on en déduit par le Théorème 3 de **?** et par la relation (4.37) (valable pour une normalisation scalaire) que la martingale $(H_t)_{t\geq 0}$ vérifie une loi du logarithme itéré donnée par :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{H_t}{h(A_t)} \leq \sqrt{2\eta}\, C \quad \text{p.s.}, \tag{4.54}$$

où $h(u) = \sqrt{2u\log\log u}$ pour $u \geq e$. Compte tenu de la relation (4.47) et du fait que $\theta_t = o(A_t)$ $p.s.$ on obtient que :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{h(A_t)}\int_0^t v_s^{-2}\big(M_sM_s^* - [M]_s\big)\, dA_s \leq \sqrt{2\eta}\, C \quad \text{p.s..}$$

La fin de la preuve est similaire à celle de la preuve précédente.. □

# 5 Application : Estimation de la variance d'un P.A.I.S. pondéré

Une question interessante nous a été posé au fur et à mesure que ce travail progressait. En effet, il s'agissait de savoir si on pouvait améliorer la vitesse logarithmique (lente) dans la propriété (TLCPS) ainsi que dans les autres propriétés qui lui sont associées. Dans ce qui suit on donne une réponse à cette question sous forme d'application. On se propose alors d'estimer la variance d'un P.A.I.S. pondéré. On dira que le processus $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ est un P.A.I.S. pondéré s'il est de la forme

$$\tilde{S}_t := \int_0^t w_s\, dS_s$$

où $w$ est un processus à variation fini alors que $S$ est un processus à accroissement indépendants et stationnaires dont la mesure de Lévy des sauts $\nu$ vérifie :

$$\nu(dt, dx) = dt\, F(dx), \quad \text{avec} \quad \int |x|^{2p} F(dx) < \infty \quad \text{pour un} \quad p > 1, \tag{5.55}$$

où $F$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$. On note :

$$m = \mathbb{E}\, S_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{E}\, S_1^2 - m^2 \quad \text{et} \quad \tilde{N}_t = \int_0^t w_r\, d(S_r - mr).$$

**Proposition 5.1.** *Avec les notations précédentes et pour*

$$w_t = \frac{t^{-\alpha/2}}{1-\alpha} \exp \frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}, \quad \alpha \in (0,1)$$

*on a les propriétés*

1. *(TLCPS)*
$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \delta_{\left\{e^{-\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \tilde{N}_s\right\}} \frac{ds}{s^\alpha} \Rightarrow \mathfrak{N}(0,\sigma^2)$$

2. *(LFQ)*
$$\tilde{\sigma}_t := \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t e^{-\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \tilde{N}_s^2 \frac{ds}{s^\alpha} \to \sigma^2 \;\; p.s. \;\; (t \to \infty).$$

   *Si de plus pour $\rho > 1/2$ on a*
$$\exp\left\{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\right\} \sum_{s \le t} (\Delta \tilde{S}_s)^2 - \int_R x^2 F(dx) = O(t^{\rho(1-\alpha)}) \;\; (t \to \infty)$$
   *alors on a la propriété*

3. *(TLCLFQ)*
$$t^{\frac{1-\alpha}{2}} (\tilde{\sigma}_t - \sigma^2) \Rightarrow \mathfrak{N}\big(0, 4(1-\alpha)\sigma^4\big).$$

La preuve de la proposition est laissée en annexe.

**Remarques**

1. Les preuves des propriétés donées dans le paragraphe 1.2 et celle de la proposition précédente sont similaires.
2. Dans la proposition 5.1, de la propriété (LFQ) on voit que $\tilde{\sigma}_t$ est un estimateur fortement consistant de $\sigma^2$. Cependant, vu la proprété (TLCLFQ), l'intervalle de confiance associé à cet estimateur est asymptotiquement meilleur que celui donné par l'estimateur sans pondération à savoir l'estimateur $\hat{\sigma}$ (voir partie 1.2)

# 6 Annexe

## 6.1 Preuve du Lemme 4.3

La propriété (4.8) implique que pour tout couple $(\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ avec $\rho_1 \le \rho_2$, on a :

$$\mathrm{tr}\Big(\int_{\rho_1}^{\rho_2} V_s^{-1} d\,(V_s V_s^*)\,(V_s^*)^{-1}\Big) = \log(\det V_{\rho_2})^2 - \log(\det V_{\rho_1})^2. \qquad (6.56)$$

Or, vu que :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\Big(\int_{\rho_1}^{\rho_2} V_s^{-1} d\left(V_s V_s^*\right)\left(V_s^*\right)^{-1}\Big) &= \operatorname{tr}\Big(\int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(V_s V_s^*\right)^{-1} d\left(V_s V_s^*\right)\Big) \\
&\geq \operatorname{tr}\Big(\left(V_{\rho_2} V_{\rho_2}^*\right)^{-1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\left(V_s V_s^*\right)\Big) \\
&\geq \operatorname{tr}\Big(\left(V_{\rho_2} V_{\rho_2}^*\right)^{-1} \left(V_{\rho_2} V_{\rho_2}^* - V_{\rho_1} V_{\rho_1}^*\right)\Big) \\
&\geq \operatorname{tr}\Big(I_d - V_{\rho_2}^{-1} V_{\rho_1} V_{\rho_1}^* (V_{\rho_2}^*)^{-1}\Big),
\end{aligned}$$

on en déduit que :

$$\operatorname{tr}\Big(\int_{\rho_1}^{\rho_2} V_s^{-1} d\left(V_s V_s^*\right)\left(V_s^*\right)^{-1}\Big) \geq d - \left\|V_{\rho_2}^{-1} V_{\rho_1}\right\|^2. \tag{6.57}$$

Les deux propriétés (6.56) et (6.57) impliquent donc que :

$$d - \left\|V_{\rho_2}^{-1} V_{\rho_1}\right\|^2 \leq \log(\det V_{\rho_2})^2 - \log(\det V_{\rho_1})^2. \tag{6.58}$$

Pour un $n_0$ fixé considérons maitenant la subdivision suivante : $\rho_0 = \rho < \rho_1 < \cdots < \rho_{n_0} = r$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\left\|V_r^{-1} V_\rho\right\|^2 &\leq \prod_{j=0}^{n_0-1} \left\|V_{\rho_{j+1}}^{-1} V_{\rho_j}\right\|^2 \\
&= \prod_{j=0}^{n_0-1} \left[d - \left(d - \left\|V_{\rho_{j+1}}^{-1} V_{\rho_j}\right\|^2\right)\right] \\
&= d^{n_0} \prod_{j=0}^{n_0-1} \left[1 - \left(1 - \frac{\left\|V_{\rho_{j+1}}^{-1} V_{\rho_j}\right\|^2}{d}\right)\right] \\
&\leq d^{n_0} \exp\left\{-\sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\left\|V_{\rho_{j+1}}^{-1} V_{\rho_j}\right\|^2}{d}\right)\right\} \\
&\leq d^{n_0} \exp\left\{-\frac{1}{d} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\log(\det V_{\rho_{j+1}})^2 - \log(\det V_{\rho_j})^2\right]\right\}.
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité :

$$\left\|V_r^{-1} V_\rho\right\|^2 \leq d^{n_0} \Big(\frac{\det V_\rho}{\det V_r}\Big)^{\frac{2}{d}}. \qquad \square$$

### 6.2 Preuve de la Proposition 5.1

On sait que $S$ est un processus à accroissement indépendents et stationnaires (P.A.I.S.) par conséquent $\tilde{N}_t := \int_0^t w_r \, d(S_r - mr)$ est une martingale dont la variation quadratique est donnée par $\langle N \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t w_r^2 \, dr$. Pour

$$w_t = \frac{t^{-\alpha/2}}{1-\alpha} \exp \frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}, \quad \alpha \in (0,1)$$

on voit que

$$e^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \langle N \rangle_t \to \sigma^2, \quad (t \to \infty).$$

Ainsi l'hypothèse $(\mathcal{H}1)$ est vérifiée. L'hypothèse $(\mathcal{H}'2)$ est immédiate. En effet

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \int_0^t e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} |x|^2 \nu^{\tilde{M}}(ds, dx) =& e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \int_0^t \frac{s^{-\alpha/2}}{1-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \, ds \int_{\mathbb{R}} |x|^2 F(dx) \\ &\to 0 \quad (t \to \infty).\end{aligned}$$

La propriété (TLCPS) est prouvée. Afin de démontrer les propriétés (LFQ) et (TLCLFQ) il nous suffit de vérifier l'hypothèse $(\mathcal{H}2)$. $\square$